



Departamento de Física
Universidade Federal de Pernambuco

Exame Geral de Doutorado

Segundo semestre de 2016

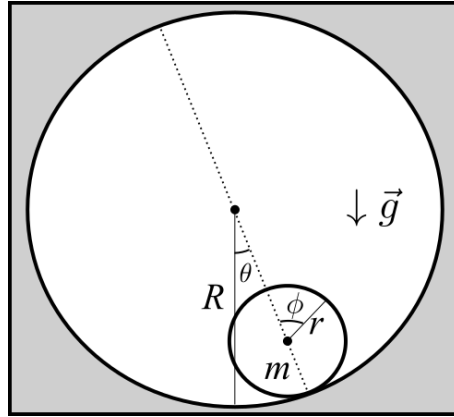
Mecânica Clássica

12/08/2016 - 9:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

Questão 1: Oscilações

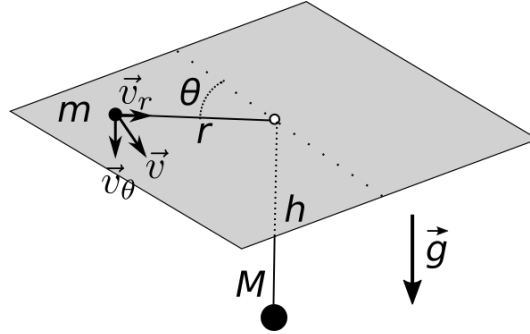
Uma casca cilíndrica de massa m , raio r e espessura desprezível, rola sem deslizar no interior de uma superfície cilíndrica de raio R que está fixa, conforme a figura abaixo. Considere que o movimento ocorre sempre com $|\theta| < \pi/2$.



- (a) (50%) Encontre as equações de movimento para a casca cilíndrica de raio r .
- (b) (20%) Encontre o período para o regime de pequenas oscilações.
- (c) (20%) Ainda no regime de pequenas oscilações, se o objeto tiver condições iniciais $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = \alpha > 0$, onde $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, encontre a solução $\theta(t)$ em função de α .
- (d) (10%) Calcule a força de atrito estático (F_a) entre a casca e a superfície cilíndricas para qualquer $|\theta| < \pi/2$. (Neste item, NÃO assumir pequenas oscilações).

Questão 2: Formalismos lagrangeano e hamiltoniano

Considere uma partícula de massa m que realiza um movimento em um plano horizontal (ver figura abaixo). Esta partícula está presa por um fio de massa desprezível a uma partícula de massa M atada à outra extremidade do fio. O fio tem tamanho total $l = r + h$. Considere que a partícula de massa M só pode se movimentar na vertical.



- (a) (20%) Escreva a lagrangeana para este sistema em função das coordenadas generalizadas adequadas. Sugestão: Pela simetria do problema, para a partícula de massa m use coordenadas polares r , θ , v_r e v_θ (ver figura).
- (b) (20%) Escreva a hamiltoniana e obtenha as equações de Hamilton para este sistema.
- (c) (20%) Quais são as constantes de movimento deste sistema? Justifique sua resposta.
- (d) (20%) Encontre as condições para as quais a partícula de massa m execute um movimento circular uniforme, ou seja $\dot{r} = \dot{h} = 0$, onde $\dot{r} = dr/dt$.
- (e) (20%) Se fizermos uma pequena perturbação nas equações do movimento com relação à situação do item anterior, $r = r_o + \delta r$, e expandindo r em primeira ordem ao redor de r_o , podemos obter uma equação diferencial para δr dada por:

$$\ddot{\delta r} = -\frac{Mg}{M+m} \left(\frac{mMg}{p_\theta^2} \right)^{1/3} \delta r$$

onde p_θ é o momento canonicamente conjugado à variável θ . Nesta situação, que tipo de movimento a partícula de massa M executará?

Questão 3: Força central

Duas partículas, de massas m_1 e m_2 , estão sob a ação exclusiva de uma força central conservativa \vec{F} que uma exerce sobre a outra, de módulo $F(r)$ e direção $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

(a) (30%) Considere um sistema de referência cuja origem coincide com o centro de massa das duas partículas. Expresse a lagrangeana do problema neste sistema de referência, $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, onde $\vec{r} = d\vec{r}/dt$. Deixe sua resposta em função da energia potencial $U(r)$ associada a esta força central e da massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ [o lagrangeano do sistema é portanto reduzido ao de uma “partícula” de massa μ com energia potencial $U(r)$].

(b) (30%) Mostre que o momento angular do sistema é uma constante de movimento.

Dado: em coordenadas esféricas, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}$.

(c) (40%) Considere, agora, que $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$, onde k é uma constante. Mostre que o vetor \vec{A} também é uma constante de movimento, isto é, $d\vec{A}/dt = 0$, onde

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu k \frac{\vec{r}}{r},$$

com \vec{p} e \vec{L} denotando, respectivamente, os momentos linear e angular da “partícula”.

Dados:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - r^2 \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} \vec{r}$$

Questão 4: Formalismo hamiltoniano e teoria de Hamilton-Jacobi

Uma partícula de massa m é lançada a partir da posição (x_0, y_0) com velocidade inicial de módulo v_0 fazendo um ângulo θ_0 com o eixo horizontal x . Em seguida, a partícula descreve um movimento oblíquo sob a ação da aceleração da gravidade constante, $\vec{g} = -g\hat{y}$. Despreze as forças dissipativas.

- (a) (10%) Calcule o vetor posição da partícula, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$, a partir da 2ª lei de Newton.
- (b) (40%) Calcule $\vec{r}(t)$ utilizando o formalismo hamiltoniano. Quais são as constantes de movimento?
- (c) (50%) Calcule $\vec{r}(t)$ utilizando a teoria de Hamilton-Jacobi.